Formula za površinu tetivnog četverokuta

Šefket Arslanagić[1]

U literaturi iz geometrije nalazi se formula za površinu tetivnog četverokuta koja glasi:

$$P=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\,, \tag{1}$$

gdje su a, b, c i d duljine stranica tog četverokuta, a $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ njegov poluopseg. Ova formula pripisuje se indijskom matematičaru i astronomu **Brahmagupti** (598. – 665.). O njoj je autor ovog rada detaljno pisao u [1], str. 385 – 393. Prvo je izvedena formula koristeći trigonometriju za površinu bilo kojeg konveksnog četverokuta $ABCD$:

$$P=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{\beta+\delta}{2}}\,. \tag{2}$$

Ova se formula ponekada u literaturi naziva **poopćena Brahmaguptina formula** za površinu četverokuta. Kod tetivnog četverokuta $ABCD$ vrijedi $\beta+\delta=\alpha+\gamma=180°$, tj. $\dfrac{\beta+\delta}{2}=90°$. No, onda je $\cos\dfrac{\beta+\delta}{2}=0$ i konačno $abcd\cos^2\dfrac{\beta+\delta}{2}=0$. Dakle, formula (1) slijedi iz (2).

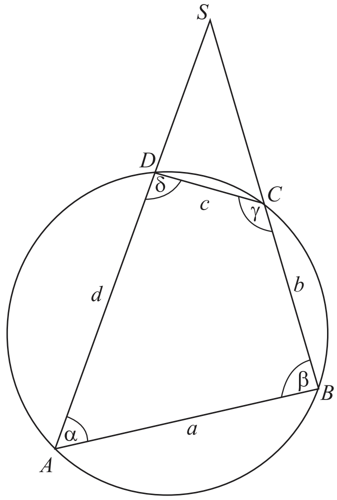
U ovom radu dat ćemo još jedan način izvođenja formule (1) za površinu tetivnog četverokuta, pri čemu nećemo koristiti trigonometriju, nego samo planimetriju.

Neka je četverokut $ABCD$ tetivni (sl. 1), pri čemu je $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $|\measuredangle DAB|=\alpha$, $|\measuredangle ABC|=\beta$, $|\measuredangle BCD|=\gamma$, $|\measuredangle CDA|=\delta$ i vrijedi $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$. Ne umanjujući općenitost, možemo uzeti da je $a>c$.

Produljimo stranice $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ do sjecišta S. Očito su trokuti ΔABS i ΔCDS slični jer im je kut u vrhu S zajednički, a zbog $\beta+\delta=180°$ slijedi da je

$$|\measuredangle CDS|=180°-\delta=\beta=|\measuredangle ABC|=|\measuredangle ABS|\,.$$

[1]Šefket Arslanagić, Odsjek za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu, BiH



Slika 1.

Površine ovih sličnih trokuta odnose se kao kvadrati duljina odgovarajućih stranica. Neka je P_1 površina trokuta ΔABS, a P_2 površina trokuta ΔCDS. Tada slijedi:

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{c^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1}-1=\frac{c^2}{a^2}-1$$

$$\Rightarrow \frac{P_2-P_1}{P_1}=\frac{c^2-a^2}{a^2}$$

$$\frac{P_1-P_2}{P_1}=\frac{a^2-c^2}{a^2}.$$

Budući da $P_1 - P_2$ predstavlja površinu P tetivnog četverokuta $ABCD$, sada slijedi da je:

$$P=\frac{a^2-c^2}{a^2}P_1. \tag{3}$$

Neka su u i v duljine stranica $\overline{AS}$ i $\overline{BS}$ trokuta ΔABS. Površinu tog trokuta izražavamo pomoću Heronove formule (**Heron**, starogrčki matematičar iz 1. stoljeća, živio i radio u Aleksandriji):

$$P_1=\frac{1}{4}\sqrt{(a+u+v)(u+v-a)(a+u-v)(a+v-u)}. \tag{4}$$

Iz sličnosti trokuta ΔSAB i ΔSCD dobivamo razmjere:

$$|SA|:|AB|=|SC|:|CD| \text{ i } |SB|:|AB|=|SD|:|CD|$$

Ili, s obzirom da je $|SA|=u$, $|AB|=a$, $|SC|=v-b$, $|CD|=c$, $|SB|=v$ i $|SD|=u-d$, imamo:

$$u:a=(v-b):c \quad \text{i} \quad v:a=(u-d):c,$$

odnosno

$$\frac{u}{a}=\frac{v-b}{c} \quad \text{i} \quad \frac{v}{a}=\frac{u-d}{c},$$

a odavde

$$\frac{u+v}{a}=\frac{v-b+u-d}{c} \quad \text{i} \quad \frac{u-v}{a}=\frac{v-b-u+d}{c}, \text{ tj.}$$

$$\left(u+v\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)=\frac{-b-d}{c} \quad \text{i} \quad \left(u-v\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=\frac{-b+d}{c}$$

te

$$u+v=\frac{a\left(b+d\right)}{a-c} \quad \text{i} \quad u-v=\frac{a\left(d-b\right)}{a+c}. \tag{5}$$

Sada zbog (5) imamo:

$$a+u+v=a+\frac{a\left(b+d\right)}{a-c}=\frac{a^2-ac+ab+ad}{a-c}=\frac{a\left(a+b+d-c\right)}{a-c}=\frac{2a}{a-c}\cdot\left(s-c\right),$$

gdje je $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Analogno dobivamo:

$$u+v-a=\frac{a\left(b+d\right)}{a-c}-a=\frac{a\left(b+d+c-a\right)}{a-c}=\frac{2a}{a-c}\cdot\left(s-a\right),$$

$$a+u-v=a+\frac{a\left(d-b\right)}{a+c}=\frac{a\left(a+c+d-b\right)}{a+c}=\frac{2a}{a+c}\cdot\left(s-b\right),$$

$$a+v-u=a-\frac{a\left(d-b\right)}{a+c}=\frac{a\left(a+c+b-d\right)}{a+c}=\frac{2a}{a+c}\cdot\left(s-d\right).$$

Uvrštavanjem ovih izraza u formulu (4), dobivamo:

$$P_1=\frac{a^2}{a^2-c^2}\sqrt{\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)}. \tag{6}$$

Sada iz (3) i (6) konačno nalazimo da je:

$$P=\sqrt{\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)},$$

a ovo je (1).

Napomena 1. Ako je $A\equiv D$, tj. četverokut $ABCD$ je trokut ΔABC, tada je $d=0$ pa iz (1) dobivamo:

$$P=\sqrt{\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)},$$

što predstavlja dobro nam poznatu Heronovu formulu za površinu trokuta ΔABC.

Napomena 2. Ako je četverokut *ABCD* tangencijalni, tj. ako je $a+c=b+d$, tada je:

$$s-a=\frac{b+c+d-a}{2}=\frac{a+c+c-a}{2}=\frac{2c}{2}=c$$

i analogno $s-c=a,\ s-b=d,\ s-d=b$. Tada iz (2) dobivamo:

$$P=\sqrt{abcd-abcd\cos^2\frac{\beta+\delta}{2}}=\sqrt{abcd\left(1-\cos^2\frac{\beta+\delta}{2}\right)}=\sqrt{abcd}\sin\frac{\beta+\delta}{2}, \text{ tj.}$$

$$P=\sqrt{abcd}\sin\frac{\beta+\delta}{2}, \tag{7}$$

što predstavlja formulu za površinu tangencijalnog četverokuta.

Napomena 3. Ako je tetivni četverokut *ABCD* i tangencijalni, tj. ako vrijedi i $a+c=b+d$ i $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$, tada iz (7) dobivamo:

$$P=\sqrt{abcd}.$$

Literatura:

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Blagojević, V., *Teoreme i zadaci iz planimetrije*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Istočno Sarajevo, 2002.
3. Grinberg, D., *Einige Formeln für das konvexe Viereck*, Wurzel (Jena), Vol.35, Nr. 6(2001.), S.127-133.
4. Modenov, P.S., *Zadaci iz geometrije*, Nauka, Moskva, 1979.
5. Pavković, B., Veljan, D., *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.